Master 1
Ingéniérie Mathématique

Semestre 1

- Processus stochastiques (6 ECTS)
- E.D.P. et Différences Finies (6 ECTS)
- Traitement et Analyse de données (6 ECTS)
  - Analyse de données
  - Base de données

⇝ option Probabilités et Statistique :

- Séries temporelles (3 ECTS)
- PPR Numérique (9 ECTS) :
  - Langage orienté objet
  - Modélisation et simulation Stochastique

⇝ option Calcul Scientifique :

- Introduction aux E.D.P. (3 ECTS)
- PPR Numérique (9 ECTS) :
  - Langage orienté objet
  - Modélisation et simulation Numérique

Semestre 2

- Statistique Mathématique (6 ECTS)
- Optimisation et Éléments finis (6 ECTS)
- PPR Découverte du monde de l'entreprise (6 ECTS) :
  - Informatique pour l'entreprise
  - Insertion professionnelle
  - Ateliers professionnels
- PPR Restitution des connaissances (6 ECTS) :
  - Anglais
  - Stage/Mémoire
- 2 options à choisir :
  - Apprentissage statistique(3 ECTS)
  - Modèles et Méthodes en Mécanique (3 ECTS)
  - Processus de décision markoviens appliqués à la finance (3 ECTS)
  - Traitement du signal (3 ECTS)

Analyse de données

6h de cours/TP par semaine pendant 6 semaines

Apprentissage statistique

4h de cours/TD/TP par semaine pendant 10 semaines

Dans ce cours, nous mettrons en pratique (en utilisant le logiciel R) certains points abordés dans le cours de Statistiques mathématiques. L'objectif sera double : consolider les compétences en programmation d'une part et mettre en pratique des méthodes vues dans d'autres cours sous un angle théorique.

Bases de données

6h de cours/TP par semaine pendant 6 semaines

L'objectif de ce cours est multiple :

— donner les bases pour la conception d'un schéma conceptuel de données. La méthode enseignée ici sera la méthode ENTITE/ASSOCIATION de MERISE. Nous apprendrons à définir des entités et des associations, à convertir le modèle conceptuel de données vers le modèle logique de données et à traduire le modèle logique de données vers la base de données cible. Nous apprendrons aussi à utiliser le logiciel Poweramc de Sybase pour définir le schéma conceptuel de données MERISE et effectuer les conversions automatiques de ce MCD vers un schéma relationnel Oracle.

— maîtriser le langage de manipulation et de définition de données SQL. Nous nous familiariserons pendant ce cours avec l'outil SQLPLUS qui est le langage permettant de manipuler interactivement les commandes SQL. Ce langage offre de nombreuses fonctions de formatage et d'édition de données. Les différentes facettes de SQL seront étudiées : le Langage de Manipulation de Données (LMD), le Langage de Définition de Données (LDD) et le Langage de Contrôle de Données (LCD). Nous apprendrons à

  (1) consulter et mettre à jour des informations stockées dans une base de données.
  (2) créer, modifier et supprimer des tables, des indexes, des séquences et des vues
  (3) contrôler des transactions et surtout de poser des verrous en cas de nécessité
  (4) consulter le dictionnaire de données Oracle

— apprendre le langage de programmation bases de données Oracle PL/SQL. Ce langage permet une manipulation efficace des bases de données. Il permet d'effectuer des boucles, des parcours conditionnels, etc. ce qui n'est pas possible avec SQL. Le langage PL/SQL est incontournable dans l'environnement Oracle car il sert à coder les procédures stockées Oracle, les triggers. Il sert aussi à écrire du code dans les outils Oracle tels que Forms (L4G Oracle). De nombreuses extensions du SGDB Oracle sont fournies sous forme de package PL/SQL.

Références :

[1] H. TARDIEU, A. ROCHFELD, R. COLLETTI, *La méthode Merise, Tome 1 : Principes et outils*, 1991, Éditions d'organisation, Paris, ISBN n° 2-7081-1106-X

[2] C. DELOBEL, M. ADIBA, *Bases de données et systèmes relationnels*, 1982, Éditions Dunod Informatique, Paris, ISBN n° 2-04-011628-1

[3] G. GARDARIN, *Bases de données, les systèmes et leurs langages*, Éditions Eyrolles Paris

[4] *Oracle database sql reference* (manuel de référence du langage SQL, contient tous les messages d'erreurs)

[5] *Oracle database utilies*

[6] *PL/SQL User's Guide and Reference* (Manuel de référence du langage PL/SQL)

Équations aux Dérivées Partielles et Différences Finies

2h cours + 3h TD par semaine pendant 12 semaines

On parcourra les trois classes de problèmes aux limites classiques en dimension un d'espace principalement : elliptique (équation de Poisson), parabolique (équation de la chaleur), hyperbolique (équation de transport linéaire). Pour chacune d'entre elles :

— on s'intéressera à leur résolution analytique formelle (séries de Fourier, séparation des variables) ou dans un cas régulier. Quand il y a lieu, on mettra en avant leurs caractéristiques classiques (principes du maximum, d'énergie,...).

— on donnera des schémas d'approximation numérique classiques de type différences finies dont on étudiera la stabilité, la consistance ainsi que la convergence.

Quand cela sera possible, on mettra en avant des propriétés de préservation au niveau discret des caractéristiques continues. La mise en oeuvre sur ordinateur au cours de séances de TP sera centrale.

1. Équation de Poisson en dimension 1 avec différentes conditions aux bords
   — Étude de l'existence et l'unicité de solutions, expression analytique dans des cas réguliers.
   — Discrétisation par différences finies : mise sous forme matricielle et propriétés de la matrice.
   — Preuve de convergence.
   — Généralisation au cas 2D (mise en œuvre).
2. Équation de la chaleur

— Construction d'une solution par la recherche de solutions à variables séparées.
— Schémas classiques d'approximation par différences finies (explicite centré, implicite centré, Crank-Nicolson). Preuves de convergence (notion de condition CFL).
— Stabilité par techniques directes et au sens de Von Neumann.

3. Équation de transport linéaire (vitesse constante)
   — Résolution par méthode des caractéristiques
   — Schémas classiques d'approximation par différences finies avec leurs propriétés de stabilité, consistance et convergence.
   — Conditions aux bords artificielles, conditions périodiques.
   — Stabilité par techniques directes et au sens de Von Neumann.
4. Si le temps le permet, équation des ondes ou équation de Burgers.

Références :

[1] D. Euvrard, *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur différences finies, éléments finis, méthode des singularités.* Masson.

[2] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation.* Éditions de l'École Polytechnique (2nde édition 2012)

[3] F. Filbet *Analyse numérique - Algorithme et étude mathématique.* (Dunod, 2e édition).

Informatique pour l'entreprise

8h de cours +16 heures de TP sur le semestre

Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles

2h cours + 2h TD par semaine pendant 10 semaines

1. Équations Différentielles
   — Résolution de $u - u'' = f$ en 1d sur l'espace entier ou sur un domaine. Écriture convolutive.
   — Équation non linéaire : portrait de phase.
   — Méthode des caractéristiques pour les équations de transport. Équation de Burgers.
2. Détermination de solutions explicites : Laplacien radial, fonctions de Bessel, etc.
3. Notion de solution faible d'une équation
   — Formulation faible des équations elliptiques (1d), avec diverses conditions au bord (Dirichlet, Neumann, périodique, Robin).
   — Principe de Dirichlet. Minimisation de fonctionnelle.
   — Le cadre H^1 (sans preuve) et résultats d'existence.

— Formulation en 2d, gradient, intégration par parties, normale.

4. Dérivation des E.D.P. (transport, chaleur...)

Références :

[1] L. Di Menza *Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles.* Cassini.

[2] T. Goudon *Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique.* ISTE.

Langage orienté objet

1h30 cours et 2h30 TP par semaine pendant 12 semaines

Ce cours est une initiation à la Programmation Orienté Objets vue à travers le langage C++ et le langage Python. Y seront abordés les éléments de syntaxe et les notions de programmation objet nécessaires à l'implémentation d'algorithmes en C++. Ce cours se veut avant tout pratique et pragmatique sur les notions abordées. L'objectif de ce cours est de fournir aux étudiants une initiation à la Programmation orientée objet ainsi qu'au C++.

Pour la partie C++, en suivant ce cours, un étudiant devra être capable de produire du code et d'écrire un programme informatique de bout en bout afin de résoudre un problème simple donné. Notions abordées :

— Le C++ d'un point de vue impératif, syntaxe élémentaire.
— Éléments de POO en C++ et implémentation.
— Utilisations pratiques en TP.

Concernant la partie Python du cours, on abordera :

— notions de base de Python
— utilisation des modules numpy, scipy, matplotlib.
— classes en Python.

Le cours sera illustré par des applications simples en TPs (représentation graphique, intégration numérique, etc).

Prérequis : Une connaissance préalable d'un langage de programmation impératif est un avantage. Néanmoins le cours reprendra ces notions et un étudiant n'ayant jamais programmé mais motivé pourra suivre ce module.

Modèles et Méthodes en Mécanique

2h cours + 2h TD/TP par semaine pendant 10 semaines

La mécanique des solides indéformables est l'étude des relations forces-déplacements. En réalité, sous l'action de forces, il y a toujours déformation du corps, indépendamment du fait que le corps soit au repos (statique) ou soit à l'état de mouvement non uniforme (dynamique). La mécanique des milieux continus (MMC) est une généralisation qui prend en compte la déformation des corps solides, liquides, gaz, plasmas, etc. Elle décrit les contraintes, les déformations et leurs relations (comportement du matériau). La MMC introduit le formalisme mathématique nécessaire à la modélisation des solides et des fluides. Ce cours est une introduction à ces notions. Les outils mathématiques introduits sont d'un usage général qui ne se limite pas aux applications en mécanique.

Modélisation et Simulation Numérique

2h cours + 2h TP par semaine pendant 10 semaines

Le but de ce cours est de fournir des bases volontairement pratiques en modélisation et analyse numérique. L'enseignement comportera essentiellement une suite de cas pratiques et relativement génériques, inspirés par exemple de l'épreuve de Modélisation – Calcul Scientifique de l'Agrégation. Les thèmes abordés, provenant souvent d'exemples en mécanique, physique, biologie, économie, réseaux sociaux ... concerneront l'analyse numérique des EDO et des EDP, l'algèbre linéaire, les méthodes de tir, la recherche de valeurs propres, les systèmes algébriques, etc.

Références :

[1] T. Goudon *Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique.* ISTE.

Modélisation et simulation Stochastique

2h cours + 2h TP par semaine pendant 10 semaines

Les méthodes de Monte-Carlo ont pour but de calculer des quantités numériques en utilisant des suites aléatoires. Ces méthodes sont utilisées en statistiques, économie . . . Elles sont un outil de base en mathématiques appliquées.

1. Rappels : Convergences de v.a., Loi des grands nombres ; Théorème Central Limite ; Intervalles de confiance.
2. Description des méthodes (comparaison avec les méthodes déterministes).
3. Simulation de variables aléatoires (méthode de rejet,).
4. Réduction de variance.
5. Méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov.

Tout au long du cours, les notions apprises seront appliquées lors de séances de TP sur machines (langage utilisé : R).

Optimisation et Éléments Finis

2h de cours et 3h de Td/TP par semaine pendant 12 semaines

1. Optimisation :

   On présentera les techniques de base pour l'optimisation en dimension finie : résultats d'existence, d'unicité, lien avec la convexité, équation et inéquation d'Euler, contraintes d'égalité et d'inégalité, multiplicateurs de Lagrange, théorème de Kuhn-Tucker. Les principaux algorithmes d'optimisation avec et sans contraintes seront donnés : gradient à pas optimal, gradient conjugué, méthode de Newton, pénalisation, recherche de point-selle d'un lagrangien. On mettra en pratique la plupart de ces algorithmes lors de séances de TP.

2. Éléments finis :

   La deuxième partie du cours sera consacrée à la méthode des éléments finis. L'utilisation des résultats d'optimisation vus en première partie du cours permettra d'appréhender les principes variationnels sous-jacents. On se concentrera sur le problème de minimisation de l'énergie de Dirichlet. On donnera la formulation variationnelle associée (formellement ou dans le cas régulier) puis les principes de discrétisation des méthodes de Galerkin. On étudiera le problème de minimisation discret et la formulation variationnelle discrète qui en découle (mise sous forme matricielle, premières propriétés du système linéaire associé, estimation d'erreur préliminaire). On étudiera en particulier le cas des approximations nodales de Lagrange, en commençant par le cas P1 en 1D : construction et propriétés de la matrice, énoncé de l'erreur de convergence. On abordera ensuite la mise en oeuvre de l'approximation P2 en 1D et P1 en 2D. On s'appliquera à détailler l'implémentation pratique notamment lors des séances de TP.

Références :

[1] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*. Éditions de l'École Polytechnique (2nde édition 2012)

[2] F. Filbet *Analyse numérique - Algorithme et étude mathématique*. (Dunod, 2e édition).

Processus stochastiques

2h cours + 3h TD par semaine pendant 12 semaines

L'objectif du cours est d'étudier l'aspect dynamique des modèles aléatoires, lorsque les systèmes considérés dépendent du temps en supplément du hasard. Pareille situation est très fréquente en physique, en biologie ou encore en économie. Ici, nous nous focaliserons sur deux exemples centraux de la théorie des processus stochastiques : les chaînes de Markov, analogues aléatoires des suites récursives déterministes, et les martingales, traduction mathématique de la notion de dynamique équitable en économie. Il s'agira d'introduire les concepts essentiels et d'en comprendre les propriétés principales : manipulations calculatoires d'un côté et comportements en temps long d'un autre.

1. Rappels : variables aléatoires, loi de probabilité, espérance, fonctions caractéristiques. Espaces vectoriels normés $\mathbb{L}^p$, inégalités usuelles.
2. Convergences stochastiques : p.s., en probabilité, en loi, en norme $\mathbb{L}^p$. Lien entre les convergences. Caractérisations de la convergence en loi.
3. Loi des grands Nombres et Théorème Limite Centrale.
4. Espérance conditionnelle : Définition et propriétés.
5. Martingales :
   - (Sur/Sous/-)Martingales bornées dans $\mathbb{L}^1$: théorème de convergence p.s. de Doob. (Sur/Sous/-)Martingales bornées dans $\mathbb{L}^2$: théorème de convergence $\mathbb{L}^2$ de Doob.
   - Temps d'arrêt et théorème d'arrêt de Doob.
   - Inégalités de Doob.
   - Applications : théorie de la ruine, urnes de Polya , processus de Galton-Watson. . .
6. Chaînes de Markov sur un espace d'états dénombrable.
   - Classification des états (récurrence, transience).
   - Propriétés de Markov faible et forte.
   - Distribution stationnaire : existence, unicité, calcul.
   - Théorème ergodique.
   - Applications : Modèles d'Ehrenfest ; Modèle de Wright-Fisher ; Google Page Rank...
7. Processus de Poisson.
   - Définition et principales propriétés.
   - Applications : paradoxe de l'autobus, files d'attente.

Le cours sera accompagné de la réalisation de mini-projets de simulation informatique (par groupe de 3-4 étudiants) avec soutenance orale.

Références :

[1] Barbé et Ledoux, *Probabilité*

[2] Ouvrard, *Probabilités, Tome 2* (très complet mais d'un abord plus difficile que le précédent)

[3] Norris, *Markov Chains*

[4] Williams, *Probability with Martingales*

Processus de décision markoviens

2h cours + 2h TD/TP par semaine pendant 10 semaines

L'objectif du cours est d'introduire les processus de décision markoviens, utilisés pour modéliser l'évolution (avec le temps) d'un ?agent rationnel ? dans un environnement incertain (évoluant lui-même avec le temps). L'agent rationnel représente ici un individu ou une machine capable de prendre des décisions ; l'agent effectue ses choix de façon rationnelle dans le but d'améliorer sa situation propre. Mathématiquement, l'état de l'agent est codé sous la forme d'une chaîne de Markov dépendant d'un contrôle ; sa situation est résumée à l'aide d'un critère de performance, moyennisé par rapport aux issues possibles de l'environnement. L'objectif principal est d'identifier, mathématiquement, la meilleure décision possible et de voir comment elle peut être approchée numériquement.

Les applications sont très nombreuses. En voici deux qui seront abordées en cours :

(i) ce paradigme est aujourd'hui utilisé en théorie de l'apprentissage par renforcement

(ii) il est également utilisé en mathématiques financières dans la gestion de portefeuille.

Séries temporelles

2h cours + 2h TD/TP par semaine pendant 10 semaines

Une série temporelle est une suite réelle finie $(x_t)_{1\leq t\leq n}$ où t représente le temps. L'objectif de l'étude des séries temporelles est la prévision (de ventes d'un produit, de la consommation d'électricité ...). Les techniques utilisées intéressent donc de nombreux acteurs de l'économie.

1. Indices descriptifs.
2. Lissages.
3. Estimation de la tendance et de la saisonnalité.
4. Modélisation des séries temporelles.
5. Composantes périodiques.
6. Processus ARCH et GARCH.

Tout au long du cours, les notions apprises seront appliquées lors de séances de TP sur machines (langage utilisé : R).

Statistique mathématique

2h cours + 3h TD par semaine pendant 12 semaines

Le but de ce cours est de poser les bases de la statistique mathématique.

1. Problématiques de la statistique mathématique et notion de modèle statistique. Exemples de modèle.

2. Notions d'estimateur et de risque en statistique. Normalité asymptotique d'un estimateur d'un paramètre réel. Construction d'intervalles de confiance. Utilisation des inégalités de Markov et Hoeffding. Utilisation du théorème central limite, de la méthode delta et du lemme de Slutsky. Utilisation de la méthode du pivot.
3. Introduction aux tests statistiques. Erreurs de première et seconde espèce, fonction puissance. Construction de tests à partir d'intervalles de confiance.
4. Les vecteurs gaussiens, le théorème de Cochran et ses applications dans le modèle linéaire gaussien.
5. La fonction de répartition et la fonction quantile. Statistique d'ordre.
6. Estimation et test dans les modèles non-paramétriques : utilisation de la mesure empirique. Estimation de la fonction de répartition et des quantiles. Bande de confiance et tests de Kolmokorov-Smirnov.
7. Estimation dans les modèles paramétriques. Estimateurs basés sur la méthode des moments. Estimateur du maximum de vraisemblance. Exemples et contre-exemples. Comparaison de procédures d'estimation. Introduction au paradigme bayésien et à l'estimation bayésienne.
8. Estimation dans les familles exponentielles à un paramètre.
9. Tests dans les modèles paramétriques. Test de Neyman-Pearson, test du rapport de vraisemblances. Test à rapports de vraisemblances monotones.
10. Tests du χ^2 : adéquation à une loi, à une famille de lois. Test du χ^2 d'indépendance.

Le cours sera accompagné de la réalisation de mini-projets (par groupe de 3-4 étudiants) avec soutenance orale.

Traitement du signal

2h de cours + 2h TD/TP par semaine pendant 10 semaines

Le traitement du signal est la discipline qui étudie le traitement, l'analyse, l'interprétation et la transmission d'informations, avec des finalités diverses : détection d'un signal, estimations, codage et compression, restauration,...Ses applications sont extrêmement nombreuses : télécommunications, traitement du son et de la parole (analyse, compression, reconnaissance), vidéos, imagerie (médicale, sécurité,...), etc. D'un point de vue technique, le traitement du signal exploite largement le formalisme de l'analyse de Fourier. Le cours suppose une familiarité avec les concepts de l'intégration ; des rappels seront faits sur les notions de séries et transformée de Fourier et le contenu complète le cours sur la théorie des distributions.

Références :

[1] M. Benidir, *Théorie et traitement du signal,* Sciences Sup. Dunod, 2002.

[2] F. Cottet, *Traitement des signaux et acquisition de données ,* Sciences Sup. Dunod, 2009.

[3] E. Candés, *Applied Fourier analysis and elements of modern signal processing,* 2016. Lecture Notes at Stanford University.

[4] C. Gasquet et P. Witomski, *Fourier Analysis and Applications. Filtering, Numerical Computation, Wavelets,* volume 30 of *Texts Applied Math.* Springer, 1999.

[5] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing.* Academic Press, 2009.

[6] E. Tisserand, J-F. Pautex et P. Schweitzer. *Analyse et traitement des signaux. Méthodes et applications au son et à l'image.* Sciences Sup. Dunod, 2008.